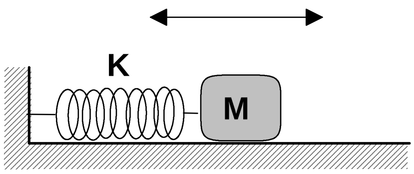
Actividad 1

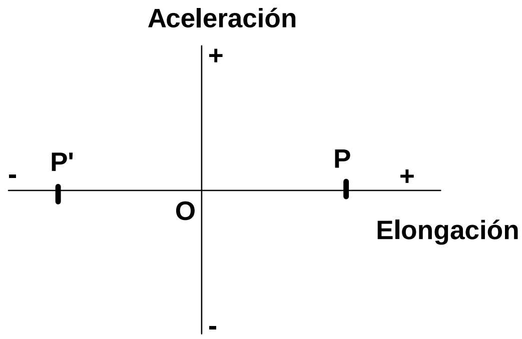
La figura representa un péndulo horizontal de resorte. La masa del bloque vale M y la constante elástica del resorte K. No hay rozamientos. Inicialmente el muelle está sin deformar.

[a] Si estiramos el muelle una distancia A y soltamos, dibuja la gráfica de la aceleración frente a la elongación. El punto O representa elongación nula, correspondiente al centro de oscilación (resorte sin tensión). Los puntos P y P' indican las elongaciones máximas, positiva y negativa, respectivamente.

[b] Calcula la frecuencia de oscilación de este péndulo.

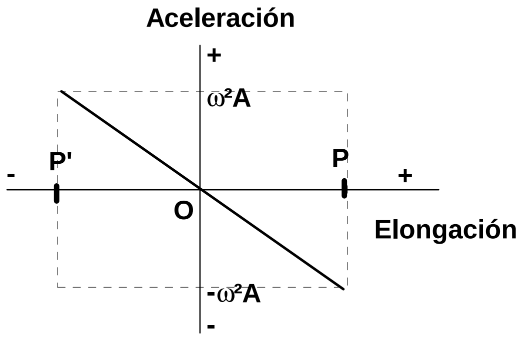
[c] ¿Qué energía mecánica posee el sistema muelle-masa? ¿Y si la masa fuese $\frac{M}{2}$ y la constante 2K?.





Respuesta

[a] Para dibujar la gráfica solicitada debes recordar la expresión matemática de la aceleración como función de la elongación: $a = -\omega^2 x$. Vemos que entre ambas existe una relación lineal; además, en los puntos O, P y P' las aceleraciones valen $0, -\omega^2 A$ y $\omega^2 A$, respectivamente. Por lo tanto, la gráfica es:



[b] Se cumple que $K = M\omega^2$; por lo que $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$ y la frecuencia será: $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$.

[c] La energía mecánica del sistema es: $E_m = \frac{1}{2}KA^2$. Vemos que la masa no aparece directamente en esta expresión, por lo que al duplicar la constante se duplicará la energía mecánica: $E'_m = \frac{1}{2}2KA^2 = KA^2$.

Puede sorprender que la masa no influya en la energía mecánica, pero hay que tener en cuenta que su influjo se manifiesta por medio de la frecuencia angular, que ahora vale $\omega' = \sqrt{\frac{2K}{M/2}} = 2\sqrt{\frac{K}{M}} = 2\omega$. La nueva energía mecánica sería, entonces, $E'_m = \frac{1}{2}M'\omega'^2 A^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{2}4\omega^2 A^2 = M\omega^2 A^2 = KA^2$.

☙ Actividad 2

Un péndulo simple está construido con una bolita suspendida de un hilo de longitud L = 2m. Para pequeñas oscilaciones, su periodo de oscilación en un cierto lugar resulta ser T = 2,84 s.

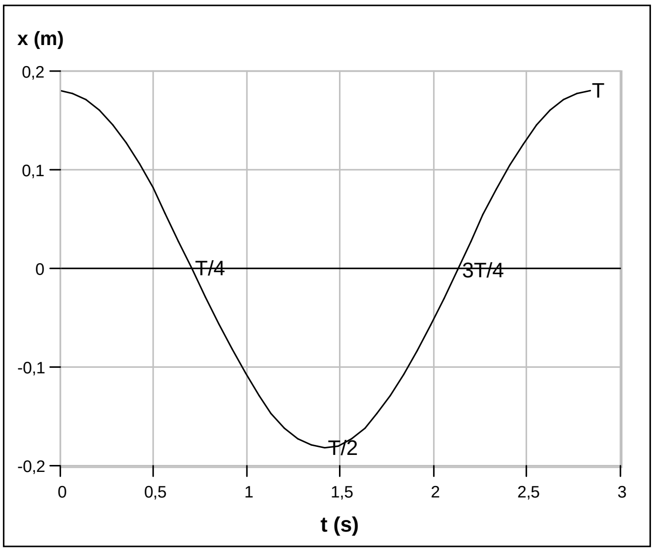
[a] Determina la intensidad del campo gravitatorio en el lugar donde se ha medido el periodo.

[b] Considera que el movimiento de la bolita es prácticamente paralelo al suelo, a lo largo del eje OX con origen, O, en el centro de la oscilación. Sabiendo que la velocidad de la bolita cuando pasa por O es de 0,4 m/s, calcula la amplitud de su oscilación y representa gráficamente su posición en función del tiempo: x(t). Toma origen para el tiempo, t = 0 s, en un extremo de la oscilación.

Respuesta

[a] Sabemos que el periodo de un péndulo simple está dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, donde g es la intensidad del campo gravitatorio; al elevar al cuadrado y despejar queda: $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 2\ (m)}{2{,}84^2\ (s^2)} = 9{,}79\ (\frac{N}{kg})$.

[b] Con la aproximación del enunciado, la trayectoria de la bolita es rectilínea en lugar de circular. La velocidad de la bolita en el centro de oscilación es el valor de la velocidad máxima; por lo tanto, $|v_{\max}| = \omega A = \frac{2\pi A}{T}$; $A = \frac{T|v_{\max}|}{2\pi} = \frac{2{,}84\ (s) \cdot 0{,}4 (m/s)}{2\pi} = 0{,}181\ (m)$.
El siguiente paso es obtener la función de la elongación, que será del tipo: $x = 0{,}181\ sen(2{,}21t + \varphi)$ y donde hay que calcular el valor de la fase inicial φ. Para t = 0, se cumple que x = A = 0,181 m (también se puede suponer que x = -A); en consecuencia, $0{,}181 = 0{,}181\ sen\ \varphi$; $1 = sen\ \varphi$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$. La ecuación de la elongación es, entonces, $x = 0{,}181\ sen(2{,}21t + \frac{\pi}{2})$. Puedes comprobar que los valores de la elongación son 0,181 m, 0, -0,181 m, 0 y 0,181 m en los instantes 0, 0,71 s, 1,42 s, 2,13 s y 2,84 s, respectivamente. A continuación se muestra la correspondiente representación gráfica.



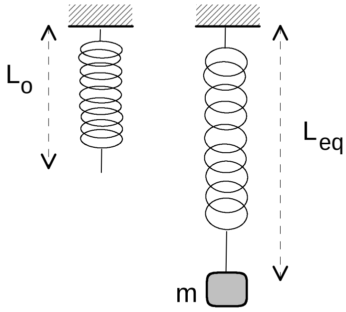
☙ Actividad 3

Un muelle de masa despreciable tiene una longitud natural L_o = 10 cm. Cuando colgamos un cuerpo de masa m = 0,1 kg de su extremo inferior, su longitud en equilibrio es L_{eq} = 20 cm. Considera g = 10 m/s².

[a] ¿Cuál es la constante recuperadora de este resorte?
Supón que, partiendo de la posición de equilibrio, desplazamos la masa 5 cm hacia abajo y la soltamos con una velocidad inicial nula, de forma que empieza a oscilar armónicamente.

[b] ¿Con qué amplitud oscilará? ¿Con qué frecuencia? ¿Con qué velocidad pasará por la posición de equilibrio?

[c] Haz una representación gráfica de la longitud del resorte en función del tiempo a partir del instante en que soltamos el cuerpo.

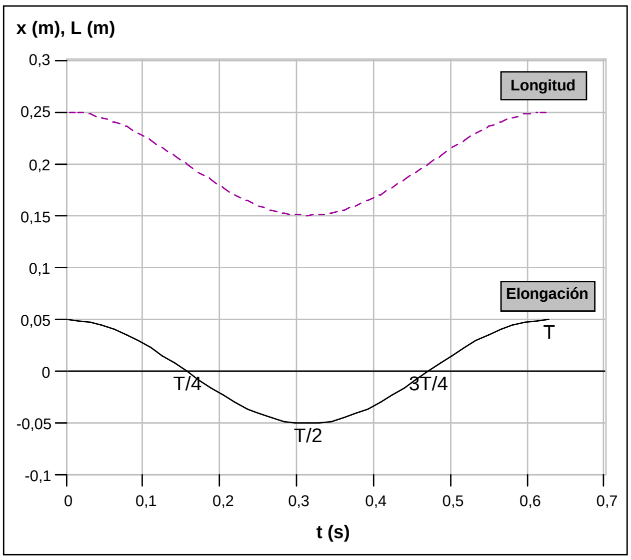


Respuesta

[a] Vemos que el muelle se alarga ΔL = L_{eq}-L_o = 10 cm. En la posición de equilibrio la fuerza recuperadora y el peso tienen módulos idénticos; por lo tanto, $k\Delta L = mg;\ k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{0{,}1(kg)\cdot 10(N/kg)}{0{,}1(m)} = 10\ (\frac{N}{m})$.

[b] La amplitud es la máxima separación de la posición de equilibrio: A = 0,05 m.
La frecuencia de las oscilaciones se calcula mediante: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0{,}1}} = \frac{5}{\pi} = 1{,}59\ Hz.$
En la posición de equilibrio la velocidad alcanza su valor máximo, esto es, $|v_{\max}| = A\omega = A2\pi f = 0{,}05(m)\cdot 2\pi\cdot\frac{5}{\pi}(Hz) = 0{,}5(\frac{m}{s})$.

[c] La longitud del resorte, en función del tiempo, es la suma algebraica de la longitud de equilibrio y de la elongación. Si suponemos que la posición x es positiva hacia abajo y que empieza a contar el tiempo cuando soltamos el cuerpo desde la posición x = 0,05 m, es fácil darse cuenta que la fase inicial vale $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Como la frecuencia angular es $\omega = 10(\frac{rad}{s})$, la expresión de la elongación es $x = 0{,}05\ sen(10t + \frac{\pi}{2})$. Finalmente, la función que hay que representar es $L = L_{eq} + x = 0{,}2 + 0{,}05\ sen(10t + \frac{\pi}{2})$. La forma de hacerlo es sencilla: primero se representa la función seno y, después, se traslada hacia arriba el perfil obtenido una distancia de 0,2 m.



Actividad 4

Una partícula de masa m = 10 g oscila armónicamente en torno al origen de un eje OX, con una frecuencia de 5 Hz y una amplitud de 5 cm.

[a] Determina la velocidad de la partícula cuando pasa por el origen.

[b] Determina y representa gráficamente la energía cinética de la partícula en función del tiempo. Toma origen de tiempo, t = 0, cuando la partícula pasa por x = 0.

Respuesta

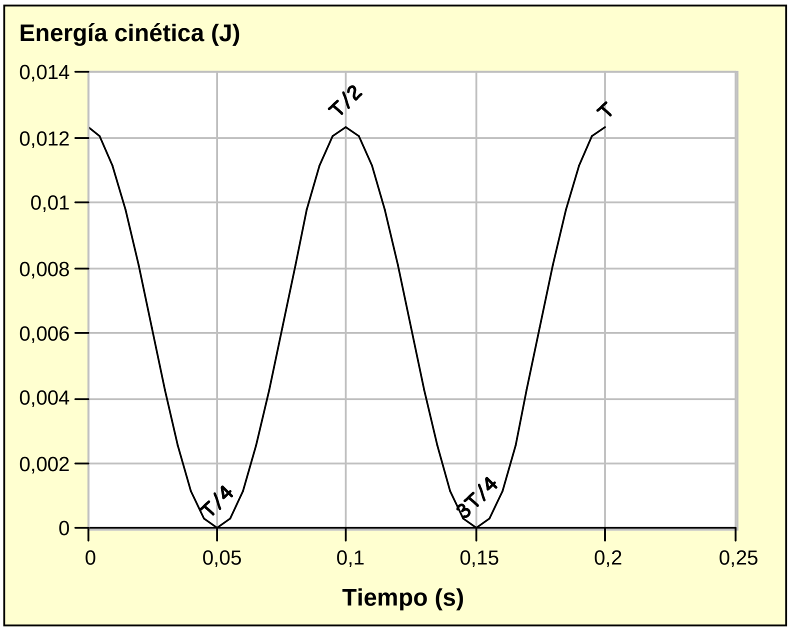
[a] Cuando la partícula pasa por el origen la velocidad alcanza su máximo valor: $|v_{\max}| = A\omega = A2\pi f = 0,05(m) \cdot 2\pi \cdot 5(Hz) = 0,5\pi = 1,57(\frac{m}{s})$.

[b] En primer lugar, escribimos la expresión matemática de la energía cinética en función del tiempo. Con la condición del enunciado se cumple que la fase inicial es $\varphi = 0$. Además, la frecuencia angular vale $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5(Hz) = 10\pi(\frac{rad}{s})$. Con todo ello la función buscada es $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t)$; al hacer la aplicación numérica queda:

$E_c = \frac{1}{2}0,01 \cdot 0,05^2 \cdot 100\pi^2 \cdot \cos^2(10\pi t) = 0,012 \cdot \cos^2(10\pi t)$. Los valores más significativos de esta función se muestran en la siguiente tabla.

t (s)	0	0,05	0,1	0,15	0,2
E_c (J)	0,012	0	0,012	0	0,012

Hay que tener en cuenta, además, que la energía cinética es una magnitud definida positiva. La representación gráfica es, entonces,

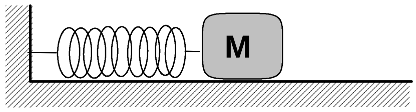


Actividad 5

El bloque de la figura, de masa M = 0,2 kg, está apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento y unido a una pared mediante un resorte horizontal y de masa despreciable. Partiendo de la posición de equilibrio, se desplaza M hacia la derecha hasta conseguir una deformación del resorte ΔL= 10 cm y se libera M con velocidad inicial nula. Se observa que M realiza una oscilación armónica en torno a la posición de equilibrio, con periodo T = 0,5 s.

[a] Calcula la constante recuperadora del resorte.

[b] Determina y representa gráficamente la aceleración M en función del tiempo, a partir del instante en que se libera.



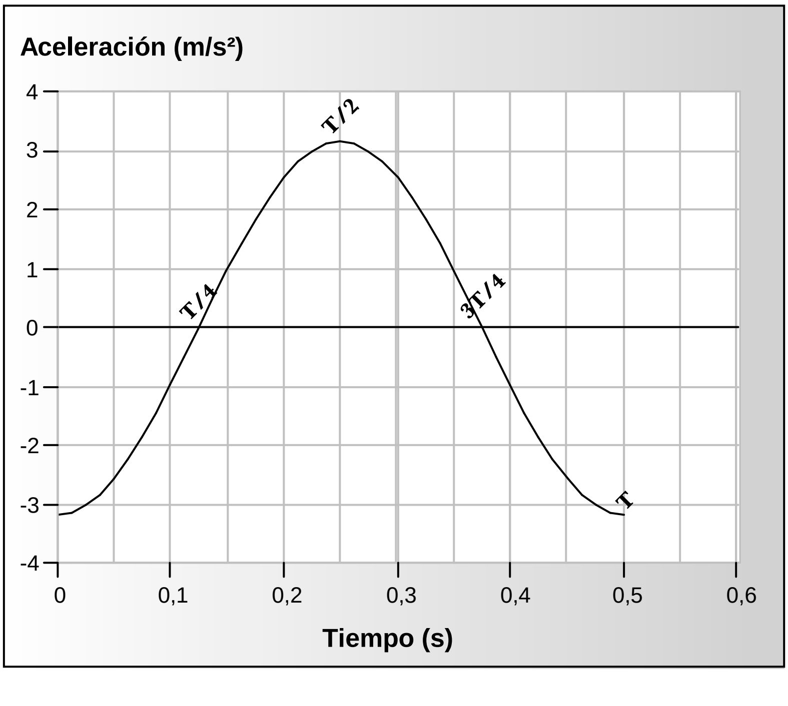
Respuesta

[a] En primer lugar, se calcula la frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi = 12,6(\frac{rad}{s})$. La constante recuperadora es, entonces, $k = M\omega^2 = 0,2(kg) \cdot 12,6^2(\frac{rad}{s})^2 = 31,8(\frac{N}{m})$.

[b] En el instante t = 0 el bloque se encuentra en la posición x = A = 0,1 m; de esta condición se deduce fácilmente que la fase inicial vale $\varphi = \frac{\pi}{2}(rad)$. En consecuencia, la ecuación de la elongación es $x = 0,1\ sen(12,6t + \frac{\pi}{2})$, que se puede escribir: $x = 0,1\cos(12,6t)$, pues se cumple que cos $a = sen(a + \frac{\pi}{2})$.

La aceleración es proporcional a la elongación: a = -kx; por lo tanto, $a = -3,18\cos(12,6t)$. Los valores más significativos de esta función se muestran en la siguiente tabla.

t (s)	0	0,125	0,25	0,375	0,5
a (m/s²)	-3,18	0	3,18	0	-3,18



Actividad 6

La bolita de un péndulo simple realiza una oscilación aproximadamente horizontal y armónica, en presencia del campo gravitatorio terrestre, con un periodo T = 2 s y una amplitud A = 2 cm.

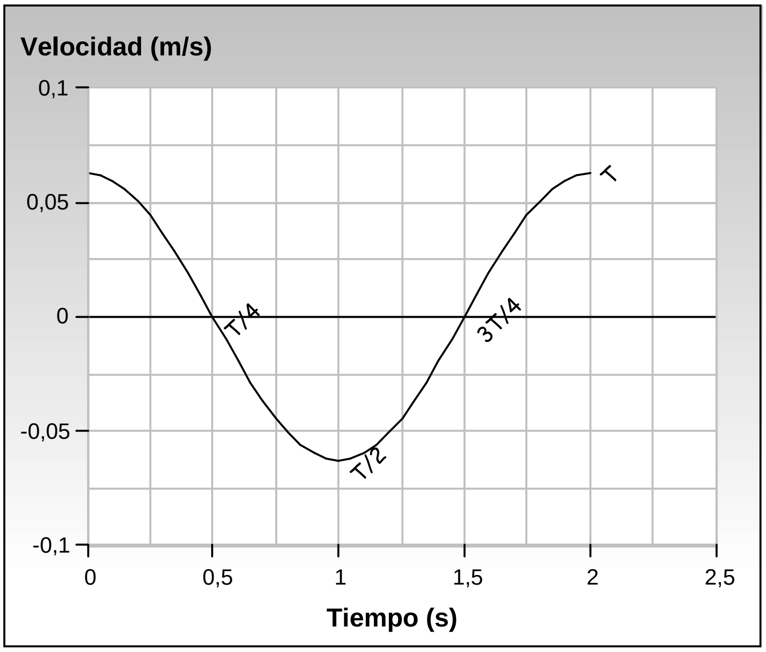
[a] Obtén la ecuación de la velocidad de la bolita en función del tiempo y represéntala gráficamente. Toma origen de tiempo (t = 0) en el centro de la oscilación.

[b] ¿Cuál sería el periodo de oscilación de este péndulo en la superficie de la Luna, donde la intensidad del campo gravitatorio es la sexta parte del terrestre?

Respuesta

[a] Es fácil darse cuenta que la fase inicial es $\varphi = 0$. Como la frecuencia angular es $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi(\frac{rad}{s})$ y la amplitud vale 0,02 m, la ecuación de la velocidad de la bolita en función del tiempo es: $v = 0,02\pi\cos(\pi t)$. Los valores más significativos de esta función se muestran en la siguiente tabla.

t (s)	0	0,5	1	1,5	2
v (m/s)	0,063	0	-0,063	0	0,063

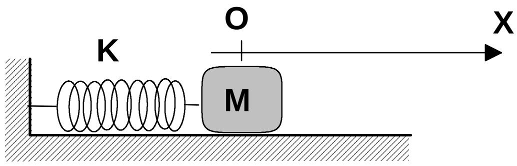


[b] El periodo del péndulo en la Luna está dado por: $T_L = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_L}}$. Como $g_L = \frac{g}{6}$, la expresión anterior puede escribirse como sigue: $T_L = 2\pi\sqrt{\frac{6L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\sqrt{6} = T\sqrt{6} = 4,9\ s$. Este resultado tiene sentido, ya que, si la fuerza de atracción lunar en menor que en la Tierra, la bolita oscilará más lentamente.

Actividad 7

El cuerpo de la figura tiene masa M = 0,5 kg, está apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento y sujeto al extremo de un resorte de constante recuperadora K = 20 N/m. Partiendo de la posición de equilibrio, x = 0, se desplaza el bloque 5 cm hacia la derecha y se libera con velocidad inicial nula, de forma que empieza a oscilar armónicamente en torno a dicha posición.

[a] Calcula el periodo de oscilación.
[b] Calcula las energías cinética y potencial de M en los extremos de su oscilación y cuando pasa por el centro de la misma.
[c] Durante la oscilación, ¿es constante la energía mecánica de M? ¿Por qué?



Respuesta

[a] Sabemos que $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{M}}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,5}{20}} = 0,99\ s$.

[b] En los extremos de la oscilación ($x = \pm A$), la energía cinética es nula y la energía potencial alcanza su máximo valor: $\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}20(\frac{N}{m}) \cdot 0,05^2(m^2) = 0,025$ J.
En el centro de la oscilación la energía cinética tiene su valor máximo: $\frac{1}{2}KA^2 = 0,025\ J$ y la energía potencial es nula.

[c] La energía mecánica se conserva porque el cuerpo evoluciona sometido a la acción de una fuerza conservativa: la fuerza recuperadora del muelle. Los resultados del apartado anterior, corroboran este principio de conservación. En los extremos de la oscilación toda la energía mecánica es potencial: $E_m = E_c + E_p = 0 + 0,025 = 0,025\ J$; en el centro de la oscilación sólo existe energía cinética: $E_m = E_c + E_p = 0,025 + 0 = 0,025\ J$.

☙ Actividad 8

Supón que en el laboratorio estás realizando una práctica con un muelle que tienes colgado verticalmente de un soporte fijo.

[a] Al colgar una pesa de masa m = 100 g de su extremo inferior, observas que el alargamiento del muelle en equilibrio es $\Delta L = 10,4$ cm. Si sustituyes la pesa por otra de masa m′ = 250 g, ¿cuál esperas que sea el nuevo alargamiento en equilibrio?

[b] Imagina ahora que suspendes del muelle una tercera pesa de masa desconocida. Tras dar un pequeño empujón vertical a la pesa, cronometras el tiempo que tarda en realizar diez oscilaciones completas y obtienes 7,9 s. Supuesto que la masa del muelle es despreciable, ¿cuál es la masa de esta pesa?

Respuesta

[a] En la primera descripción del experimento se cumple que los valores de la fuerza recuperadora y del peso son iguales: $k\Delta L = mg$, expresión que nos permite calcula la constante recuperadora del muelle; al despejar k se llega a: $k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{0,1\cdot 9,8}{0,104} = 9,42\ \frac{N}{m}$. Al sustituir la primera pesa por la segunda el alargamiento en el nuevo equilibrio será: $\Delta L' = \frac{m'g}{k} = \frac{0,25\cdot 9,8}{9,42} = 0,26\ m$.

Otra forma de resolver el ejercicio es comparar las expresiones literales de la constante recuperadora en los dos casos y realizar los cálculos pertinentes. Se cumple que $k = \frac{mg}{\Delta L}$ para la primera masa y $k = \frac{m'g}{\Delta L'}$ para la segunda masa; de ambas, $\frac{mg}{\Delta L} = \frac{m'g}{\Delta L'}$; $\frac{m}{\Delta L} = \frac{m'}{\Delta L'}$.

La masa y el alargamiento son directamente proporcionales. Finalmente, $\Delta L' = \frac{m'\Delta L}{m} = 2,5\cdot 10,4 = 26\ cm$.

[b] El periodo de oscilación vale: $T = \frac{7,9(s)}{10} = 0,79(s)$. Por otro lado, sabemos que $T = 2\pi\sqrt{\frac{m''}{k}}$.

Si se eleva al cuadrado y se despeja la masa, queda: $T^2 = 4\pi^2\frac{m''}{k}$;

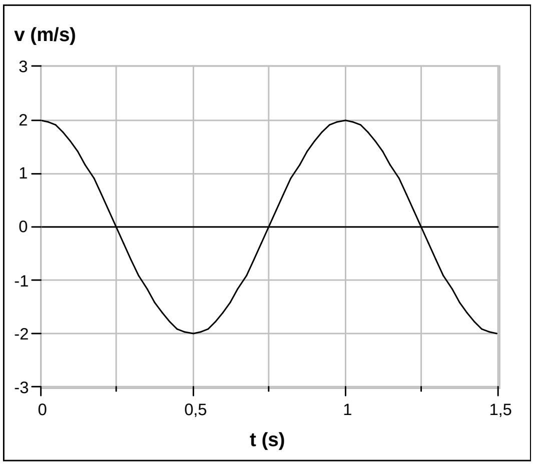
$m'' = \frac{k\cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{9,42\cdot 0,79^2}{4\pi^2} = 0,149\ kg$.

Actividad 9

Una partícula de masa m = 10 g oscila armónicamente en la forma $x = A\ sen\ \omega t$. En la figura se representa la velocidad de esta partícula en función del tiempo.

[a] Determina la frecuencia angular, ω, y la amplitud, A, de la oscilación.

[b] Calcula la energía cinética de *m* en el instante t_1 = 0,5 s y la potencial en t_2 = 0,75 s. ¿Coinciden? ¿Por qué?



Respuesta

[a] De la figura, deducimos que la rapidez máxima es de 2 m/s y que el periodo vale 1 s. La frecuencia angular vale, entonces, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi = 6,28(\frac{rad}{s})$. Por otro lado, $|v_{\max}| = A\omega$; $A = \frac{|v_{\max}|}{\omega} = \frac{2}{6,28} = 0,32\ m$.

[b] En la gráfica vemos que, en el instante t_1 = 0,5 s, la velocidad de la partícula es -2 m/s y que, para t_2 = 0,75 s, la velocidad de la partícula es nula, por lo que se encuentra en uno de los extremos de la oscilación ($x = \pm A$). Calculamos el valor de la constante de recuperación: $k = m\omega^2 = 0,01(kg) \cdot 6,28^2(\frac{rad}{s})^2 = 0,394(\frac{N}{m})$. Por lo tanto,

$$E_{c,1} = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0,01(kg) \cdot (-2)^2(\tfrac{m}{s})^2 = 0,02(J)$$

$$E_{p,2} = \tfrac{1}{2}kx_2^2 = \tfrac{1}{2} \cdot 0,394(\tfrac{N}{m}) \cdot 0,32^2(m)^2 = 0,02(J)$$

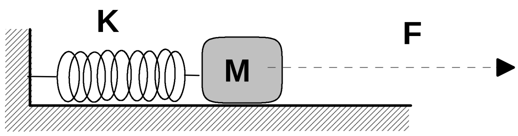
Estos resultados coinciden porque, en el instante t_1, la partícula se encuentra en x = 0 y toda la energía mecánica es cinética, mientras que, en el instante t_2,, toda la energía mecánica es potencial. Recuerda que la energía mecánica se conserva.

Actividad 10

El bloque de la figura, de masa M = 0,5 kg, está apoyado sobre una superficie horizontal sin rozamiento y unido a una pared mediante un resorte de masa despreciable y constante recuperadora K = 8 N/m. Inicialmente se hace actuar sobre M una fuerza F = 2 N en el sentido indicado. A continuación, una vez que M ha alcanzado el equilibrio, se anula F.

[a] ¿Con qué amplitud oscilará M? ¿Con qué frecuencia angular, ω?

[b] Determina y representa gráficamente las energías cinética, potencial y mecánica de M en función del tiempo. Toma origen de tiempo, t = 0, en el instante de anular F.

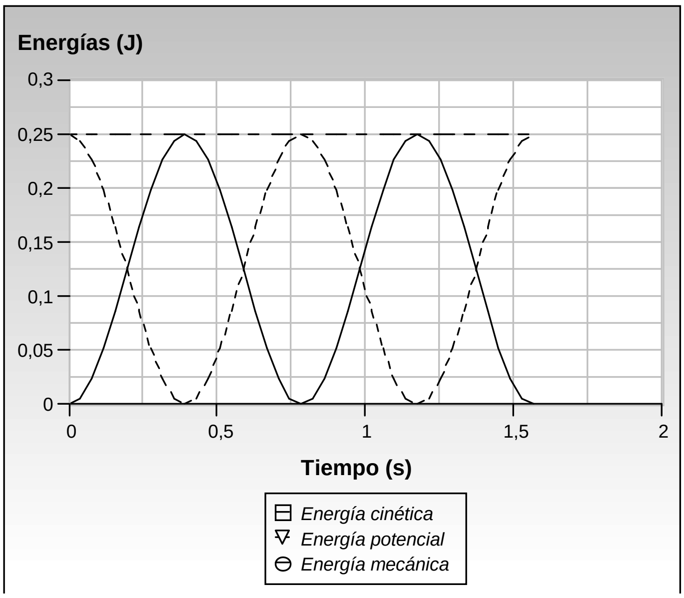


Respuesta

[a] En primer lugar se calcula el alargamiento del muelle por la acción de la fuerza F. Dicho alargamiento coincide con la amplitud A del MAS: $A = x = \frac{F}{K} = \frac{2(N)}{8(\frac{N}{m})} = 0,25(m)$. La frecuencia angular se calcula mediante: $\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{8}{0,5}} = 4(\frac{rad}{s})$.

[b] Antes de determinar las expresiones de las energías en función del tiempo, vamos a deducir las ecuaciones de la elongación y de la velocidad.
Como para t = 0, x = A, la fase inicial es: $\varphi = \frac{\pi}{2}(rad)$; por lo tanto, la ecuación de la elongación es: $x = 0,25\ sen(4t + \frac{\pi}{2}) = 0,25\cos(4t)$. La ecuación de la velocidad se obtiene derivando la función anterior: $v = -0,25 \cdot 4\ sen(4t) = -sen(4t)$.
Las ecuaciones de las energías, como funciones del tiempo, son, entonces:
$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0,25\ sen^2(4t)$; $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0,25\cos^2(4t)$ y $E_m = 0,25(J)$. Teniendo en cuenta que el periodo es: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}(s)$, los valores más significativos de las energías se muestran en la siguiente tabla:

t (s)	0	π/8	π/4	3π/8	π/2
E_c (J)	0	0,25	0	0,25	0
E_p (J)	0,25	0	0,25	0	0,25
E_m (J)	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25



Actividad 11

Un péndulo simple está formado por un hilo de longitud L = 99,2 cm y una bolita que oscila en horizontal con una amplitud A = 6,4 cm y un periodo T = 2,00 s.

[a] Calcula la intensidad del campo gravitatorio local, g.

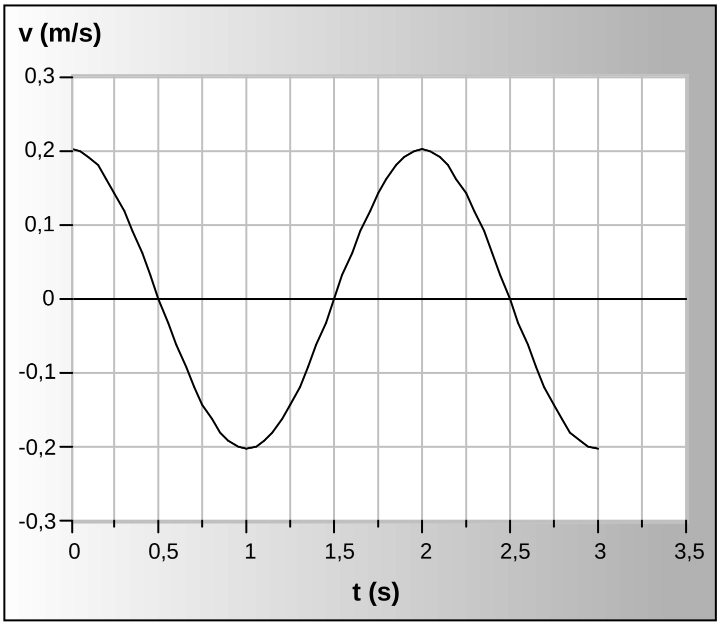
[b] Determina y representa gráficamente la velocidad de la bolita en función del tiempo, v(t). Toma como origen de tiempo, t = 0, cuando la bolita pasa por su posición de equilibrio.

Respuesta

[a] El periodo de un péndulo está dado por: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$; al elevar al cuadrado y al agrupar los términos apropiados se llega a: $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}992(m)}{4(s^2)} = 9{,}79\left(\frac{N}{kg}\right)$.

[b] Es fácil darse cuenta que la fase inicial es $\varphi = 0$. Como la frecuencia angular es $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi\left(\frac{rad}{s}\right)$ y la amplitud vale 0,064 m, la ecuación de la velocidad de la bolita en función del tiempo es: $v = 0{,}2\pi\cos(\pi t)$. Los valores más significativos de esta función se muestran en la siguiente tabla.

t (s)	0	0,5	1	1,5	2
v (m/s)	0,2	0	-0,2	0	0,2



☙ Actividad 12

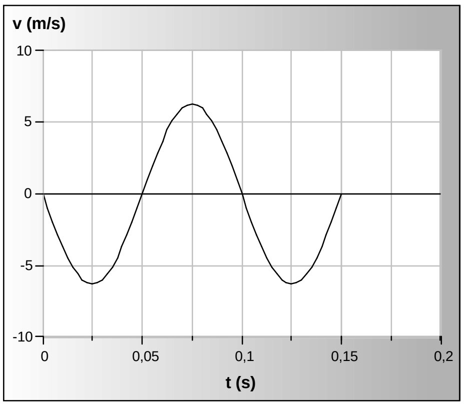
Una partícula de masa m = 5 g oscila armónicamente a lo largo del eje OX en la forma: $x = A\cos\omega t$, con A = 0,1 m y $\omega = 20\pi(s^{-1})$.

[a] Determina y representa gráficamente la velocidad de la partícula en función del tiempo.
[b] Calcula la energía mecánica de la partícula.
[c] Determina y representa gráficamente la energía potencial de *m* en función del tiempo.

Respuesta

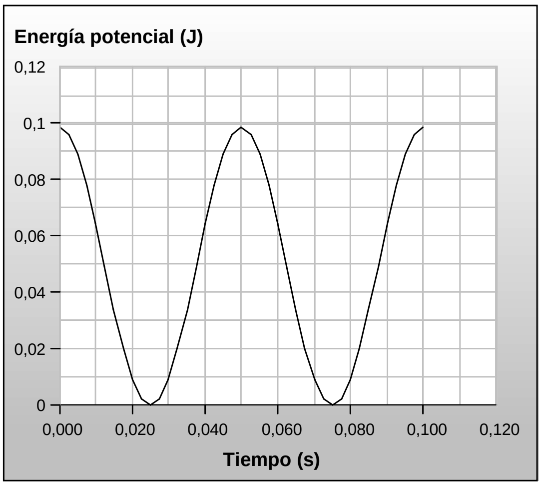
[a] La ecuación de la velocidad se obtiene derivando la ecuación de la elongación con respecto al tiempo: $v = -2\pi\ sen\ 20\pi t$. Los valores más significativos de esta función se muestran en la siguiente tabla.

t (s)	0	0,025	0,05	0,075	0,1
v (m/s)	0	-6,28	0	6,28	0



[b] La energía mecánica de la partícula se obtiene a partir de: $E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$; al sustituir los valores queda: $E_m = \frac{1}{2}0,005\cdot(20\pi)^2\cdot 0,1^2 = 0,099(J)$.

[c] La energía potencial está dada por: $E_p = \frac{1}{2}kx^2$. El valor de la constante es: $k = m\omega^2 = 0,005\cdot 400\pi^2 = 19,7(\frac{N}{m})$. Al sustituir x por su expresión en función del tiempo se llega a: $E_p = \frac{1}{2}19,7\cdot 0,01\cos^2(20\pi t) = 0,099\cos^2(20\pi t)$. Los valores de la energía potencial son 0,099, 0, 0,099, 0 y 0,099 (J) en los instantes 0, 0,025, 0,05, 0,075 y 0,1 (s), respectivamente.



☙ Actividad 13

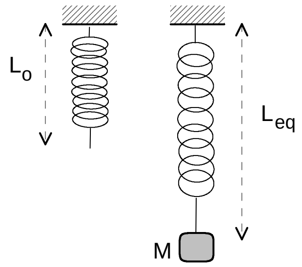
Un muelle de masa despreciable tiene una longitud natural L_o = 20 cm. Cuando de su extremo inferior se cuelga un cuerpo de masa M = 0,1 kg, la longitud de equilibrio del muelle es L_{eq} = 30 cm.

[a] Calcula la constante recuperadora, k, de este muelle. Considera g = 10 m/s².

Partiendo de la posición de equilibrio anterior, se desplaza M hacia arriba 10 cm, es decir, hasta que el muelle tiene su longitud natural. A continuación se suelta M con velocidad inicial nula, de forma que empieza a oscilar armónicamente en dirección vertical.

[b] Calcula la longitud máxima del muelle, en el punto más bajo de la oscilación de M.

[c] Calcula la amplitud y la frecuencia de la oscilación, y la velocidad de M cuando pasa por su posición de equilibrio.



Respuesta

[a] En la posición de equilibrio se cumple que $k\Delta L = mg$; de donde se deduce que la constante recuperadora vale: $k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{0,1(kg)\cdot 10(m/s^2)}{0,1(m)} = 10(\frac{N}{m})$.

[b] El cuerpo oscila 10 cm arriba y abajo de la posición de equilibrio; la longitud máxima del muelle es, entonces, de 40 cm.

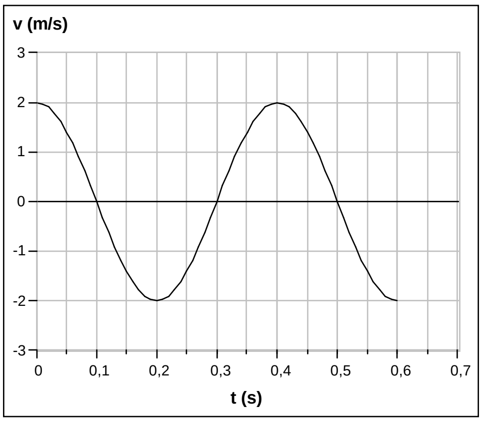
[c] La amplitud es de 10 cm, desplazamiento del cuerpo a partir de la posición de equilibrio. La frecuencia se calcula mediante: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0,1}} = \frac{10}{2\pi} = \frac{5}{\pi} = 1,59(Hz)$. Cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio su velocidad es máxima: $|v_{\max}| = A\omega = 0,1 \cdot 10 = 1(\frac{m}{s})$.

Actividad 14

Un cuerpo de masa m = 0,1 kg oscila armónicamente a lo largo del eje OX. En la figura se representa su velocidad en función del tiempo.

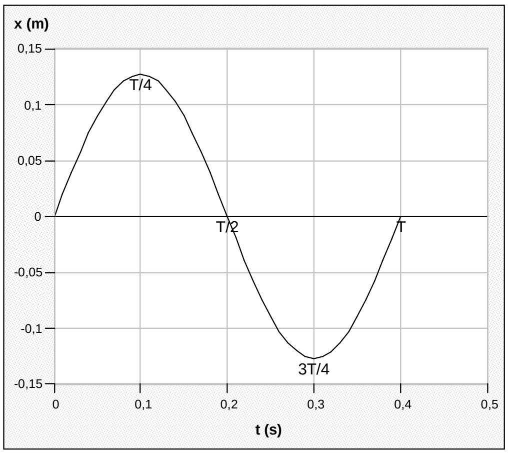
[a] Determina y representa gráficamente la posición (elongación) de la partícula en función del tiempo.

[b] Calcula las energías cinética y potencial de la partícula en el instante t = 0,05 s.



Respuesta

[a] De la gráfica deducimos que la rapidez máxima es 2 m/s y que el periodo vale 0,4 s; además, la fase inicial es . La frecuencia angular es, entonces, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi = 15,7(\frac{rad}{s})$ y la amplitud: $A = \frac{|v_{\max}|}{\omega} = \frac{2}{5\pi} = 0,127(m)$. Con estos resultados la ecuación de la elongación es: $x = 0,127\ sen(15,7t)$; los valores de la elongación son 0, 0,127, 0, -0,127 y 0 (m) en los instantes 0, 0,1, 0,2, 0,3 y 0,4 (s), respectivamente.



[b] La ecuación de la velocidad es: $v = 2\ \cos(15,7t)$, por lo que la energía cinética, en función del tiempo, está dada por: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}0,1 \cdot 4\ \cos^2(15,7t) = 0,2\ \cos^2(15,7t)$. En el instante t = 0,05 s, dicha energía vale: $E_c(0,05s) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1(J)$.

La energía potencial, en función del tiempo, está dada por:

. En el instante t = 0,05 s, esta energía vale: $E_p(0,05s) = 0,198 \cdot 0,5 = 0,1(J)$.

El hecho de que los valores de la energía cinética y de la energía potencial coincidan se debe a una propiedad general de las ondas armónicas; el instante t = 0,05 s corresponde a $\frac{T}{8}$ y para este valor se cumple que .

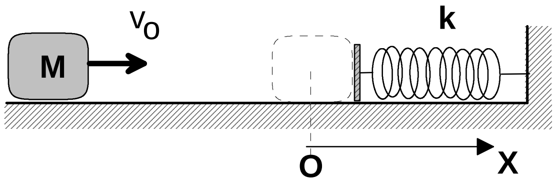
Actividad 15

[a] Escribe la ecuación de la elongación de un movimiento vibratorio armónico simple y comenta el significado de las magnitudes que aparecen en dicha ecuación.

Un bloque de masa M = 0,4 kg desliza sobre una superficie horizontal sin rozamiento con velocidad v_o = 0,5 m/s. El bloque choca con un muelle horizontal de constante elástica k = 10 N/m. Tras el choque, M queda enganchada en el extremo del muelle.

[b] Calcula la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones de M.

[c] Determina y representa gráficamente la posición del centro de M en función del tiempo, x(t), a partir del instante del choque (t = 0), en el sistema de referencia indicado en la figura.



Respuesta

[a] Véase cualquier manual de Física.

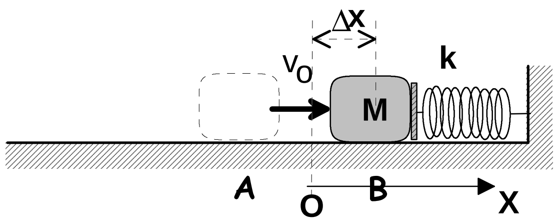
[b] Por la conservación de la energía mecánica podemos calcular la máxima compresión del muelle. Esta compresión, medida a partir del punto O hacia la derecha, coincide con la amplitud del movimiento armónico simple que se origina. Dicho movimiento tiene lugar a ambos lados del punto O.

La energía mecánica en el estado A es la mismas que la energía mecánica en el estado B.

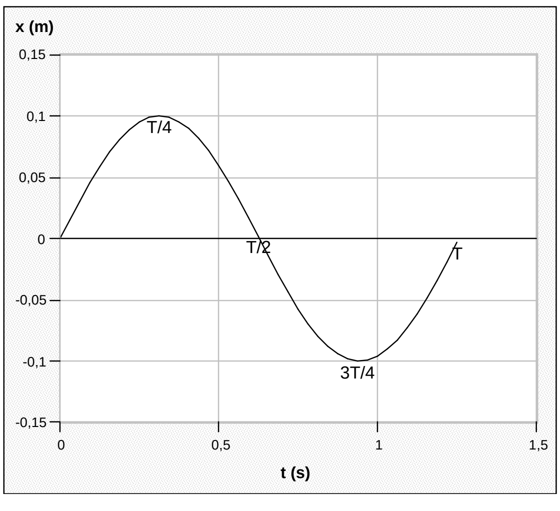
$E_m(A) = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}0,4 \cdot 0,25 = 0,05(J)$

$E_m(B) = \frac{1}{2}k\Delta x^2 = 5\Delta x^2$

De ambas, $0,05 = 5\Delta x^2$; $\Delta x = 0,1(m)$; la amplitud vale, por tanto, 0,1 m. La frecuencia se calcula mediante: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0,4}} = \frac{5}{2\pi} = 0,80(Hz)$.



[c] El centro de M se comporta como una partícula, por lo que su elongación, en función del tiempo es: $x = 0,1\ sen(5t)$, ya que la fase inicial es cero porque en el instante t = 0, x = 0.



☙ Actividad 16

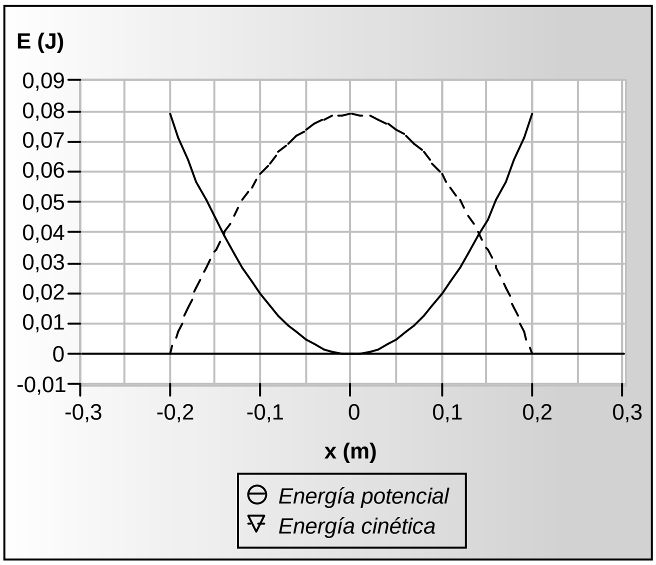
Una partícula de masa m = 0,1 kg oscila armónicamente en la forma $x = A\ sen\ \omega t$, con amplitud A = 0,2 m y frecuencia angular $\omega = 2\pi(\frac{rad}{s})$.

[a] Calcula la energía mecánica de la partícula.
[b] Determina y representa gráficamente las energías potencial y cinética de *m* en función de la elongación *x*.

Respuesta

[a] La energía mecánica de un oscilador armónico es: $E_m = \frac{1}{2}kA^2$; como $k = m\omega^2$, la energía mecánica de la partícula vale: $E_m = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}0,1 \cdot 4\pi^2 \cdot 0,04 = 0,08(J)$.

[b] La energía potencial es: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0,2\pi^2x^2$.
La energía cinética está dada por: $E_c = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) = 0,2\pi^2(0,04 - x^2)$.
Se trata de dos funciones cuadráticas cuya representación gráfica corresponde a sendas parábolas; además, la primera pasa por el punto (0, 0) y su vértice es un mínimo; la segunda, por su parte, pasa por los puntos (0,2, 0) y (-0,2, 0) y su vértice es un máximo.



Puede comprobarse, a partir de la gráfica, que la energía mecánica de la partícula siempre es igual a 0,08 J, resultado que concuerda con el del apartado [a].

☙ Actividad 17

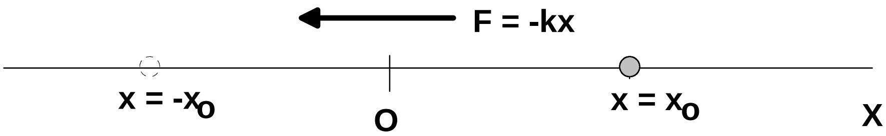
Una partícula de masa *m*, que sólo puede moverse a lo largo del eje OX, se sitúa inicialmente (t=0) en la posición x = x_o y se libera con velocidad nula. Sobre ella actúa una fuerza, dirigida según el eje OX, F = -kx, donde *k* es una constante positiva.

[a] ¿Qué tipo de movimiento realiza la partícula? Describe analítica y gráficamente cómo dependen del tiempo su posición, *x(t)*, y su velocidad, *v(t)*.

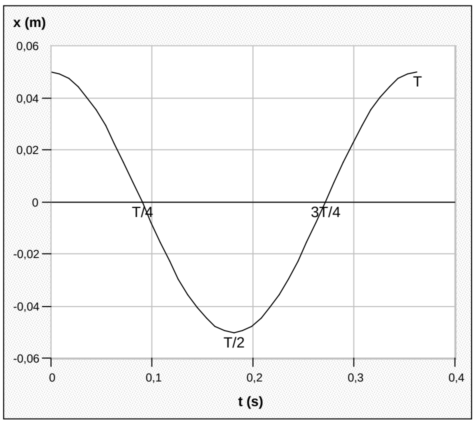
[b] Para m=0,1 kg, k=30 N/m y x_o=5 cm, calcula las energías cinética y potencial de la partícula cuando pasa por x = 0.

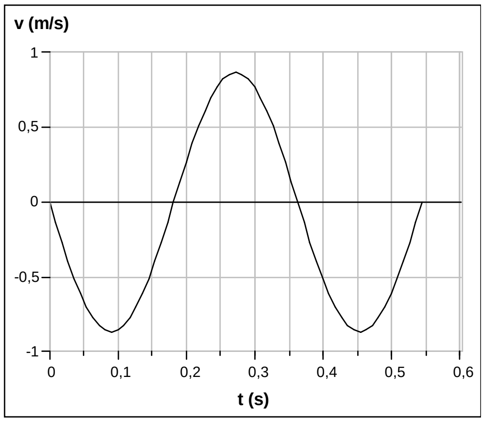
Respuesta

[a] La partícula se encuentra inicialmente en la posición x = x_o, en reposo y sometida a una fuerza hacia la izquierda de intensidad kx_o.



Como la fuerza que actúa sobre la partícula es proporcional a la elongación y de sentido contrario a ésta, el movimiento de la partícula es armónico simple entre las posiciones x_o y $-x_o$. La frecuencia angular del citado movimiento es: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y la amplitud es x_o. En el instante t = 0, x = x_o, por lo que la fase inicial es: $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Con toda esta información podemos escribir las expresiones de la posición y de la velocidad como funciones del tiempo: ; $v = x_o\omega\,\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -x_o\omega\, sen\,\omega t$. Las representaciones gráficas de estas funciones ya nos son familiares:





[b] La energía potencial se calcula mediante: $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, por lo que, en x = 0, la energía potencial es nula.

La energía cinética vale: $E_c = \frac{1}{2}k(x_o^2 - x^2)$, con lo que, en x = 0, la energía cinética es:

$E_c = \frac{1}{2}kx_o^2 = \frac{1}{2}30(\frac{N}{m}) \cdot 0,05^2(m^2) = 3,75 \cdot 10^{-2}(J)$.

Actividad 18

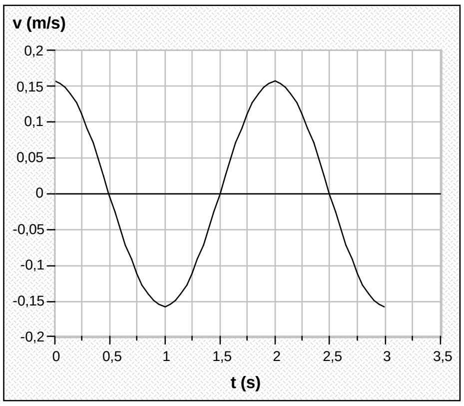
La bolita de un péndulo simple realiza una oscilación aproximadamente horizontal y armónica, en presencia del campo gravitatorio terrestre, con un periodo T = 2 s y una amplitud A = 5 cm.

[a] Determina y representa gráficamente la velocidad de la bolita en función del tiempo, *v(t)*. Toma origen de tiempo, t = 0, cuando la bolita pasa por el centro de su oscilación desplazándose en sentido positivo.

[b] ¿Cuál sería el periodo de oscilación de este péndulo en la superficie de la Luna, donde la intensidad del campo gravitatorio es la sexta parte del terrestre?

Respuesta

[a] La ecuación de la velocidad, en general, es de la forma: $v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$. Como la amplitud es conocida, se calcula la frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi(rad)$. En el instante inicial, t=0, x = 0 y v>0, con lo que la fase inicial es: $\varphi = 0$. Téngase en cuenta que, si la velocidad tuviese sentido negativo, la fase inicial sería: $\varphi = \pi$. En consecuencia, la velocidad está dada por: $v = 0,05\pi\cos\pi t$. Su representación gráfica se muestra a continuación.



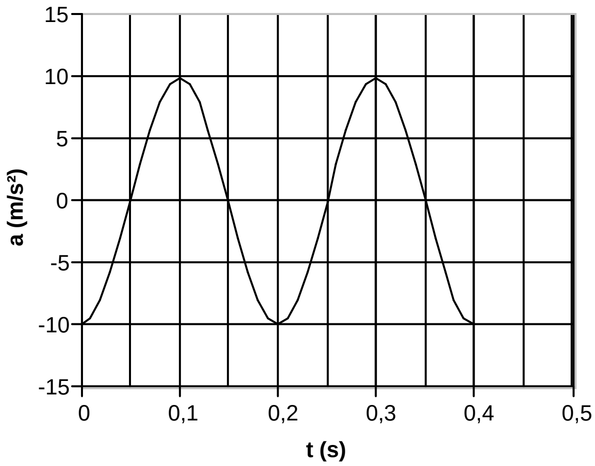
[b] El periodo de oscilación en la Luna es: $T_L = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_L}}$, donde g_L es la intensidad del campo gravitatorio lunar. Dicha ecuación se puede escribir:
$T_L = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T/6}} = \sqrt{6}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_T}} = \sqrt{6}\,T_T$, donde T_T es el periodo en la Tierra. Finalmente, tenemos: $T_L = \sqrt{6}\cdot 2 = 4,9(s)$.

Actividad 19

Un cuerpo de masa M = 0,1 kg oscila armónicamente en torno al origen O de un eje OX. En la figura se representa la aceleración de M en función del tiempo.

[a] Determina la frecuencia y la amplitud de oscilación de M.

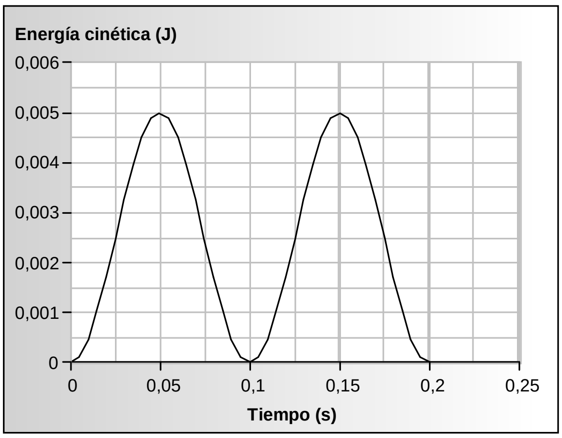
[b] Determina y representa gráficamente la energía cinética de M en función del tiempo.



Respuesta

[a] Del análisis de la gráfica deducimos que el periodo vale 0,2 s y que el valor máximo de la aceleración es 10 m/s². La frecuencia es, entonces, $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}2} = 5(Hz)$. Por otro lado, sabemos que $|a_{\max}| = A\omega^2$; se puede calcular fácilmente la frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi(\frac{rad}{s})$, por lo que la amplitud será: $A = \frac{|a_{\max}|}{\omega^2} = \frac{10}{100\pi^2} = 0,01(m)$.

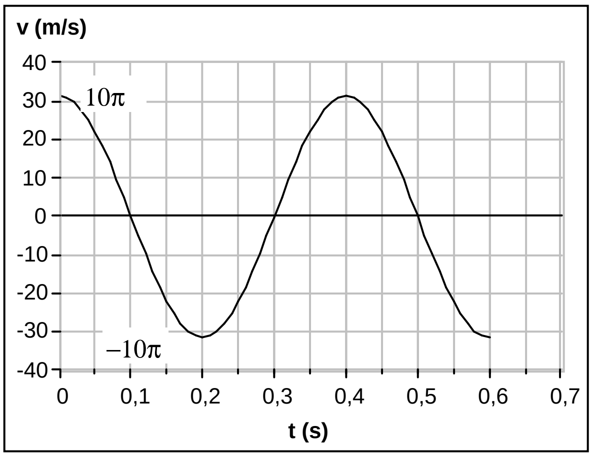
[b] En general, la expresión de la energía cinética es: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$. La fase inicial se puede obtener con la información suministrada por la gráfica anterior. Para t=0, a=-10 m/s²; se cumple, entonces, que $-10 = -A\omega^2 sen\ \varphi$; $-10 = -10\ sen\ \varphi$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
La energía cinética se expresa mediante la función: $E_c = 0,005 \cos^2(10\pi t + \frac{\pi}{2})$. Por la relación trigonométrica $sen\ \alpha = -\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$, queda finalmente: $E_c = 0,005\ sen^2(10\pi t)$. Su representación gráfica se muestra seguidamente.



☙ Actividad 20

Una partícula de masa m = 20 g oscila armónicamente en la forma $x(t) = A\ sen\ \omega t$. En la figura se representa la velocidad de la partícula en función del tiempo.

[a] Determina la frecuencia angular ω y la amplitud A de la oscilación.
[b] Calcula la energía cinética y la potencial de la masa m en función del tiempo. Justifica cuánto vale la suma de ambas energías.



Respuesta

[a] De la gráfica deducimos que el periodo vale 0,4 s, por lo que la frecuencia angular será: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}4} = 5\pi(\frac{rad}{s})$. En la misma gráfica vemos que la máxima rapidez es 10π (m/s). Como $|v_{\max}| = A\omega$, $A = \frac{|v_{\max}|}{\omega} = \frac{10\pi}{5\pi} = 2(m)$.

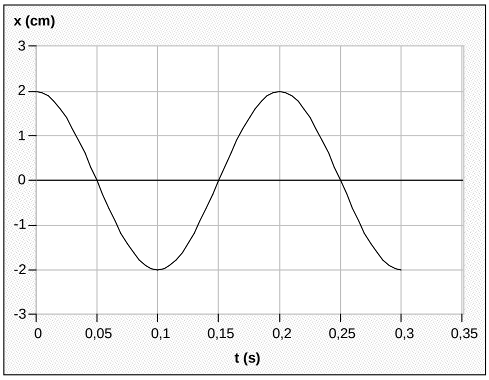
[b] La expresión de la energía cinética es: $E_c = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2 \omega t = \pi^2 \cos^2 5\pi t$. La energía potencial está dada por: $E_p = \frac{1}{2}kA^2\ sen^2\ \omega t = \pi^2\ sen^2\ 5\pi t$. La suma de ambas, que es la energía mecánica de la partícula, vale $\pi^2(J)$; se comprueba así la conservación de la energía mecánica.

☙ Actividad 21

Una partícula oscila armónicamente a lo largo del eje OX en la forma representada en la figura.

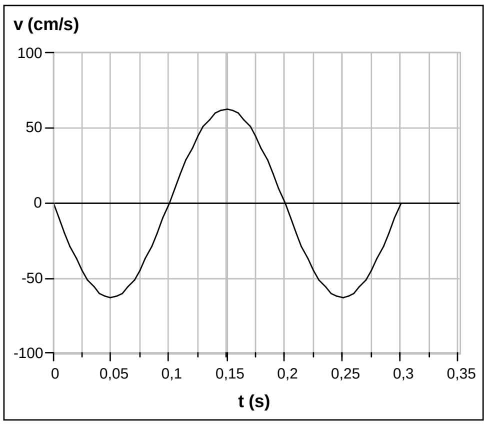
[a] Determina y presenta gráficamente la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.

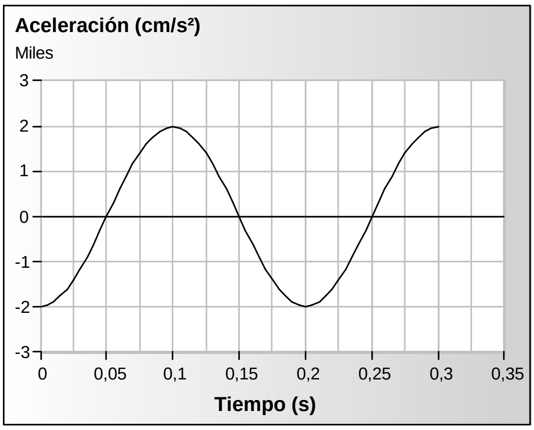
[b] ¿En qué instantes es máxima la energía cinética de la partícula? ¿Qué valor tiene en esos instantes su energía potencial?



Respuesta

[a] La ecuación de la elongación, en general, es de la forma: $x = A\ sen(\omega t + \varphi)$. Vemos, en la gráfica, que A = 2 cm y T = 0,2 s, así que se puede calcular la frecuencia angular: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 10\pi(rad)$. En el instante inicial, t=0, x = 2 cm, con lo que la fase inicial es: $\varphi = \frac{\pi}{2}$. En consecuencia, la elongación está dada por: $x = 2\ \text{sen}\ (10\pi t + \frac{\pi}{2})$. Las expresiones de la velocidad y de la aceleración son, entonces, $v = \frac{dx}{dt} = 20\pi\ \cos(10\pi t + \frac{\pi}{2})$ y $a = \frac{dv}{dt} = -200\pi^2\ sen(10\pi t + \frac{\pi}{2})$, respectivamente. Sus representaciones gráficas se muestran a continuación:





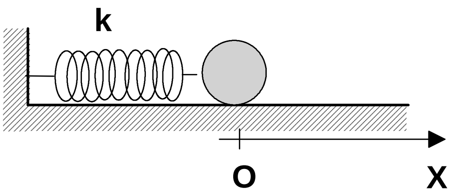
[b] La energía cinética será máxima cuando lo sea, en valor absoluto, la velocidad, cosa que sucede en los instantes t = 0,05 s, 0,15 s, 0,25 s,... = $\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}$...; en resumen, la energía cinética es máxima en los instantes que son múltiplos impares de la cuarta parte del periodo. En estos instantes la energía potencial elástica es mínima, de valor cero.

Actividad 22

Una partícula de masa m = 32 g, unida a un muelle de constante elástica k = 20 N/m, oscila armónicamente sobre una superficie horizontal sin rozamiento con una amplitud de 3 cm.

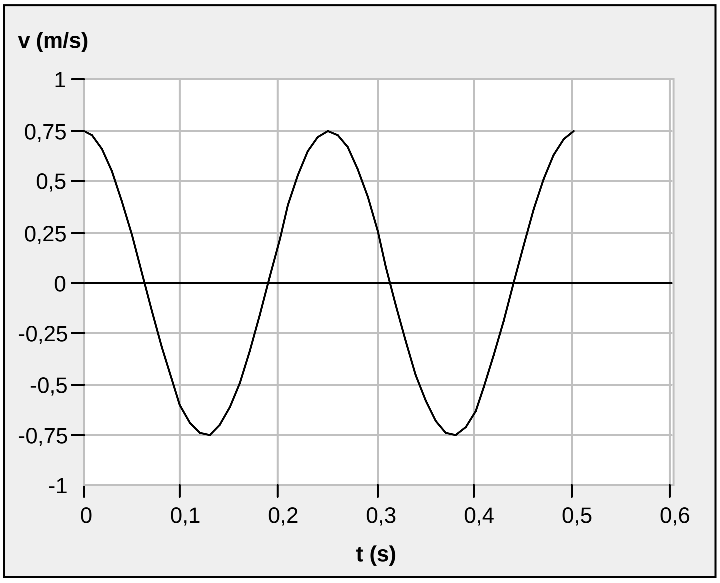
[a] Determina, y representa gráficamente, la velocidad de la partícula en función del tiempo.

[b] Calcula la energía mecánica de la partícula. ¿Qué fuerza se ejerce sobre la masa cuando se encuentra a 1 cm de su posición de equilibrio?



Respuesta

[a] La expresión de la velocidad puede obtenerse, por derivación de la ecuación de la elongación; ésta es del tipo: $x = A\ sen\ \omega t$, si suponemos que x = 0 para t = 0. La frecuencia angular se calcula mediante: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20(N)}{0{,}032(kg)}} = 25(\frac{rad}{s})$. En consecuencia, la elongación está dada por: $x = 0{,}03\ sen\ 25t$. Al derivar esta función se obtiene la velocidad como una función del tiempo: $v = \frac{dx}{dt} = 0{,}75\ \cos\ 25t$, cuya representación gráfica se muestra a continuación.



[b] La energía mecánica de la partícula vale: $E_m = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 20(\frac{N}{m})\cdot 0{,}03^2(m^2) = 9\cdot 10^{-3}(J)$.

La fuerza sobre la partícula se obtiene a partir de la 2ª ley de Newton, cualquiera que sea el procedimiento utilizado: $F = ma = m(-\omega^2 x) = -kx$; en este caso,

$F = -20(\frac{N}{m})\cdot(\pm 0{,}01m) = \pm 0{,}2(N)$. La partícula puede encontrarse a 1 cm de distancia a ambos lados de la posición de equilibrio y la fuerza puede estar dirigida en los dos sentidos, dependiendo del instante.

Actividad 23

La partícula de masa m = 10 g de la figura *1a* describe el movimiento armónico simple en torno a su posición de equilibrio representado en la figura *1b* (rozamiento despreciable).

[a] Escribe la expresión de la elongación, en función del tiempo, indicando el significado y el valor numérico de cada parámetro.

[b] Representa la evolución temporal de la energía potencial elástica y la energía total de la partícula.

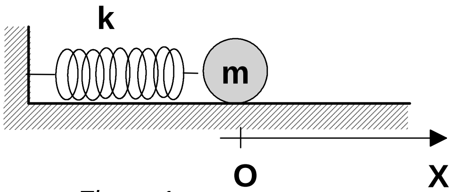


Figura 1a

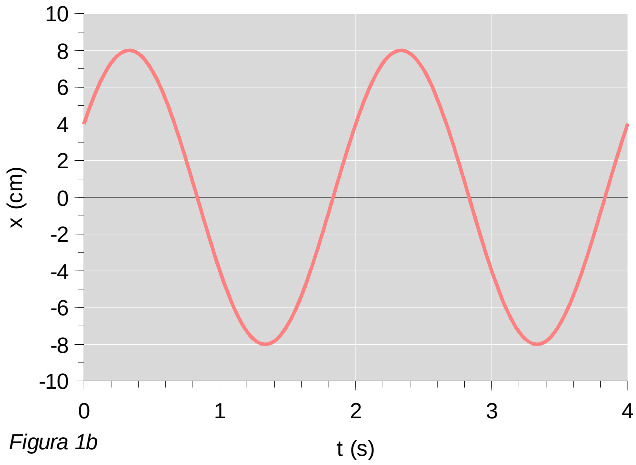


Figura 1b

Respuesta

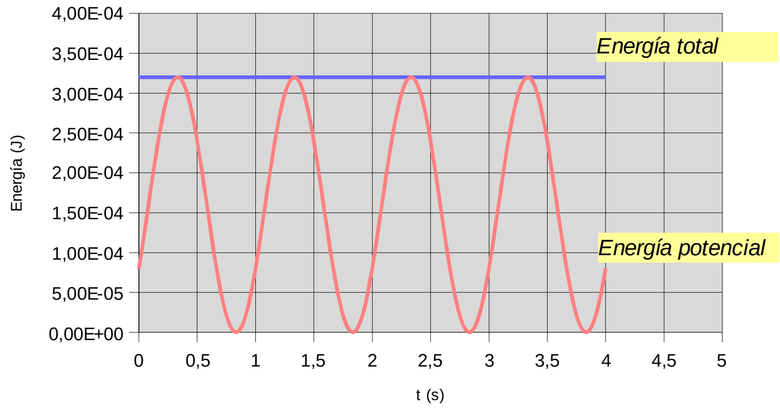
[a] La expresión buscada tiene el siguiente aspecto: $x(t) = A \cdot sen(\omega t + \phi_o)$, donde A, ω y $\phi_o$son las constantes que hay que calcular. La amplitud A respresenta la máxima separación de la partícula, respecto a la posición de equilibrio; la frecuencia angular está relacionada con el periodo T mediante: $\omega = 2\pi/T$; y la fase inicial $\phi_o$indica, indirectamente, la posición de la partícula cuando t = 0.

De la gráfica se deduce que: A = 8 cm, T = 2 s y $\omega = \pi\ \frac{rad}{s}$; además, cuando t = 0, x = 4 cm, por lo que: $4 = 8 \cdot sen\ \phi_o$; $sen\ \phi_o = 0,5$; $\phi_o = \frac{\pi}{6}\ rad$. En consecuencia, la elongación, en función del tiempo, está dada por: $x(t) = 8 \cdot sen(\pi t + \frac{\pi}{6})$.

[b] La energía potencial elástica, en función del tiempo, es:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}k \cdot x^2 = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot 0,08^2 \cdot sen^2(\pi t + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{1}{2}0,01 \cdot \pi^2 \cdot 0,08^2 \cdot sen^2(\pi t + \tfrac{\pi}{6})$$

$E_p(t) = 3,2 \cdot 10^{-4}\ sen^2(\pi t + \frac{\pi}{6})$ (J). La energía total vale: $E_m = \frac{1}{2}k \cdot A^2 = 3,2 \cdot 10^{-4}\ J$.



☙ Actividad 24

[a] Escribe la expresión de la elongación, en función del tiempo, del oscilador armónico. A partir de ella deduce y representa la evolución temporal y la aceleración de dicho oscilador.
[b] Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple. Escribe la ecuación de dicho movimiento, en unidades del SI, con las siguientes condiciones: la aceleración máxima es $2\pi^2$ cm/s^2, el periodo T = 4 s y, al iniciarse el movimiento, la elongación era 4 cm y el cuerpo se alejaba de la posición de equilibrio.

Respuesta

[a] Existe más de una posibilidad en la respuesta. Así, puedes elegir entre la función seno o la función coseno para la elongación, con o sin fase inicial. Por derivaciones sucesivas obtienes las expresiones de la velocidad y la aceleración en función del tiempo. Creo que se refiere a esto cuando en el enunciado se indica "representa la evolución temporal...".

[b] Vamos buscando una expresión del tipo: $x(t) = A \cdot sen(\omega t + \phi_o)$, donde A, ω y $\phi_o$son las constantes que hay que calcular a partir de los datos del enunciado. Sabemos que: $|a_{\max}| = A\omega^2 = A \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$; de donde se deduce que: $A = \frac{|a_{\max}| \cdot T^2}{4\pi} = \frac{2\pi^2 \cdot 16}{4\pi^2} = 8(cm)$; además, $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}(\frac{rad}{s})$. Por otro lado, cuando t = 0, x = 4 cm, por lo que: $4 = 8 \cdot sen\,\phi_o$; $sen\,\phi_o = 0,5$; $\phi_o = \frac{\pi}{6}(rad)$. Por lo tanto, la ecuación del movimiento es: $x(t) = 8 \cdot sen(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6})\ (cm)$.
Puede comprobarse ahora, a partir de la expresión de la velocidad, que en el instante inicial la velocidad es positiva.