

LOGARITMOS

1. **Definición:** $\log_a x = N \Leftrightarrow x = a^N$

2. Tipos de logaritmos importantes

- a) **Logaritmo decimal:** Es el logaritmo de base 10, y se escribe $\log x$ (sin especificar la base).
b) **Logaritmo neperiano:** Es el logaritmo de base e (e es un número irracional similar a π de valor aproximado 2'718). Se escribe $\ln x$.

3. Consecuencias de la definición de logaritmo

- I. $\log_a 1 = 0$ (puesto que $a^0 = 1$)
II. $\log_a a = 1$ (puesto que $a^1 = a$)
III. $\log_a a^n = n$ (puesto que $a^n = a^n$)
IV. No existe $\log_a x$ si $x \leq 0$ (puesto que $a > 0$ y cualquier potencia de base positiva es siempre mayor que 0)

4. Propiedades de los logaritmos

I. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

Demostración:

Por definición de logaritmo, $\log_a x = N \Leftrightarrow x = a^N$ y $\log_a y = M \Leftrightarrow y = a^M$

Sustituyendo x e y en el primer término: $\log_a (x \cdot y) = \log_a (a^N \cdot a^M) = \log_a (a^{N+M}) = N + M$

Ejemplo: $\log_a 6 = \log_a (2 \cdot 3) = \log_a 2 + \log_a 3$

II. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

Demostración:

Por definición de logaritmo, $\log_a x = N \Leftrightarrow x = a^N$ y $\log_a y = M \Leftrightarrow y = a^M$

Sustituyendo x e y en el primer término: $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \left(\frac{a^N}{a^M}\right) = \log_a (a^{N-M}) = N - M$

Ejemplo: $\log_a 5 = \log_a \left(\frac{10}{2}\right) = \log_a 10 - \log_a 2$

III. $\log_a (x^q) = q \cdot \log_a x$ para cualquier valor de q (incluidos los exponentes fraccionarios que resultan de los radicales)

Demostración:

Por definición de logaritmo, $\log_a x = N \Leftrightarrow x = a^N$

Sustituyendo x e y en el primer término: $\log_a (x^q) = \log_a \left((a^N)^q\right) = \log_a (a^{q \cdot N}) = q \cdot N$

Ejemplos: $\log_a 25 = \log_a (5^2) = 2 \cdot \log_a 5$ $\log_a \sqrt[3]{5} = \log_a \left(5^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot \log_a 5$

EJERCICIOS

1. Calcula los siguientes logaritmos

a) $\log_2 32$

b) $\log_2 0'5$

SOL: a) 5 b) -1 c) -4 d) -4 e) -1 f) -2 g) -3 h) 3 i) 3 j) 4

c) $\log_3 \frac{1}{81}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

e) $\log 0'1$

f) $\log_5 0'04$

g) $\log_6 \frac{1}{216}$

h) $\log_5 125$

i) $\log_4 64$

j) $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{625}$

2. Calcula el valor de N en cada caso

SOL: a) 81 b) 1000 c) 8 d) $\sqrt[3]{100}$ e) e^2 f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{1}{2}$ h) 4 i) 3 j) $\frac{1}{3}$

a) $\log_3 N = 4$

b) $\log N = 3$

c) $\log_{\frac{1}{2}} N = -3$

d) $\log N = \frac{2}{3}$

e) $\ln N = 2$

f) $\log_N \sqrt[4]{8} = -\frac{3}{4}$

g) $\log_N 32 = -5$

h) $\log_N 16 = 2$

i) $\log_N \sqrt[5]{9} = \frac{2}{5}$

j) $\log_N \frac{1}{27} = 3$

3. Calcula el valor de N y M para que sean ciertas las siguientes igualdades.

a) $\log N + \log 3 = \log 21$

b) $\log 16 = N \cdot \log 2$

c) $\log \sqrt{8} = N \cdot \log 2$

d) $\log N = 2 \cdot \log 3$

e) $\log 8 - \log 2 = \log N$

f) $\log N + M \cdot \log 2 = \log 28$

SOL: a) N=7 b) N=4 c) N=3/2 d) N=9 e) N=4 f) N=7, M=2

4. Expresa como un solo logaritmo.

a) $\log 6 + \log 2 - \log 3$

b) $2 \log 2 + \log 36 - \log 12$

c) $\log 3 + \log 25 - \left(\frac{1}{2} \log 3 + \log 5\right)$

d) $3 \cdot (\log 8 - \log 4) + \log 3$

e) $3 \log 2 - 4 \log 3 + 5 \log 15$

f) $3 \log 5 + \frac{1}{2} \log 9 - 3 \log 3 - \log 25$

g) $\log 5 + \frac{7}{3} \log 9 - 3 \log x$

h) $2 \log x - 3 \log y + 2$

i) $\frac{1}{2} \log N - 2 \log T - \log P + \frac{5}{2} \log H$

j) $\log(xy) - 2 \log\left(\frac{x}{y}\right)$

k) $2 \log(a-b) + \log(a^2 - b^2)$

l) $(5 \log x - 4 \log y) + (3 \log x - \log y)$

SOL: a) $\log 4$ b) $\log 12$ c) $\log(5\sqrt{3})$ d) $\log 24$ e) $\log 25000$ f) $\log \frac{5}{9}$ g) $\log \frac{5 \cdot \sqrt[3]{9^7}}{x^3}$

h) $\log \frac{100x^2}{y^3}$

i) $\log \frac{\sqrt{N \cdot H^5}}{T^2 \cdot P}$

j) $\log \frac{y^3}{x}$

k) $\log \frac{a-b}{a+b}$

l) $\log \frac{x^8}{y^5}$

5. Aplica las propiedades de los logaritmos para desarrollar las siguientes expresiones

a) $\log\left(\frac{a^2 b^3}{c^4}\right)$

b) $\log\left(\frac{\sqrt{a^3}}{b^2 c^{-4}}\right)$

c) $\log\left(\sqrt[5]{\frac{a^4 b^3}{c^2}}\right)$

SOL: a) $2 \log a + 3 \log b - 4 \log c$

b) $\frac{3}{2} \log a - 2 \log b + 4 \log c$

c) $\frac{4}{5} \log a + \frac{3}{5} \log b - \frac{2}{5} \log c$

6. Sabiendo que $\log 2 \approx 0'3$ y $\log 3 \approx 0'5$, calcular los siguientes logaritmos

a) $\log 6$

b) $\log 144$

c) $\log \frac{8}{81}$

d) $\log 15$

e) $\log \frac{4}{45}$

f) $\log \sqrt[4]{48}$

SOL: a) 0'8

b) 2'2

c) -1'1

d) 1'2

e) -1'1

f) 0'425